Einfache Varianzanalyse

(auch 1-faktorielle ANOVA = Analysis of variance)

Gegenstand der Untersuchung ist der **<u>Einfluss</u>** eines **Faktors A,** ausgeprägt in mehreren **Stufen** (*z.B.: Faktor A=Futtermittel, in Stufen A_1=herkömmlich, A_2=mit Zusatzstoff , …, A_a=…*)
auf eine davon abhängige <u>Zielvariable</u> = **Messgröße x** (*z.B. x=tägl. Gewichtszunahme*).

- ## Vorgangsweise:

In jeder der **a Stufen** (auch Verfahren bzw. Gruppen genannt) werden **n Wiederholungen** durchgeführt (*z.B.: jedes Futtermittel A_1, … ,A_a wird an jeweils n Tieren verfüttert*).

Tabelle: a **Stichproben** mit **Umfang = n**, also insgesamt $\boxed{\boldsymbol{N = a \cdot n}}$ x-Werte.(-> Berechnungen siehe später)

Stichprobe	A_1	A_2	…	A_a	
	$\mathbf{x_{11}}$	$\mathbf{x_{21}}$	**…**	$\mathbf{x_{a1}}$	
	$\mathbf{x_{12}}$	$\mathbf{x_{22}}$	**…**	$\mathbf{x_{a2}}$	
	…	**…**	**…**	**…**	
	$\mathbf{x_{1n}}$	$\mathbf{x_{2n}}$	**…**	$\mathbf{x_{an}}$	
Mittelwerte	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_a$	$\bar{x}$
=Varianzen	s_1^2	s_2^2		s_a^2	

Varianz der Mittelwerte $=S_{\bar{x}_i}^{\ 2}$ -->*n DQ(A)

Mittelwert der Varianzen $=\bar{S}^2$ ----→ DQ(R)

$\left.\begin{array}{l} DQ(A) \\ DQ(R) \end{array}\right\} F$

- ## Nullhypothese:

Unter der Annahme, dass der Faktor A **keinen Einfluss** auf die Zielvariable x ausübt, müssen die Stichproben A_1 , … A_a in der **Grundgesamtheit** alle den **gleichen Mittelwert** und die **gleiche Varianz** haben:

H_0: „alle Stichproben stammen aus derselben (normalvert.) Grundgesamtheit“

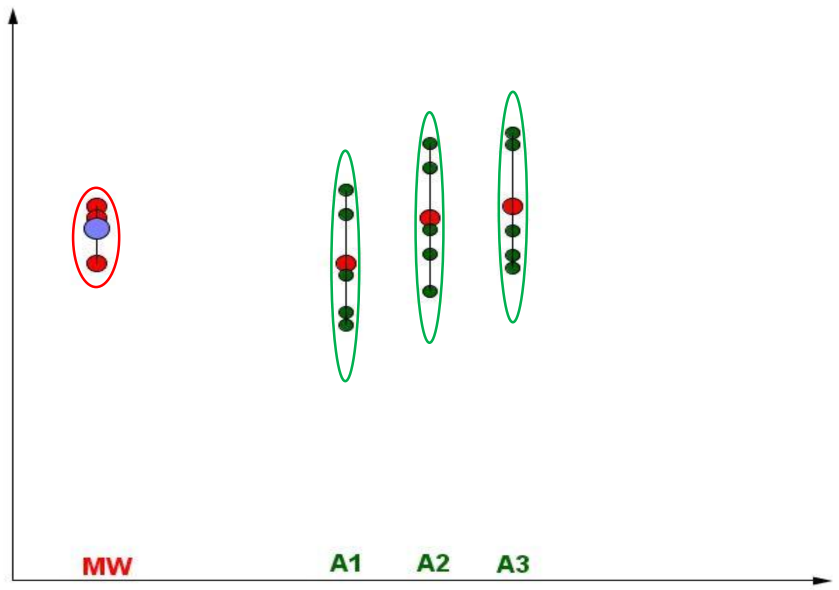
$$\boxed{H_o:\ \mu_1 = \mu_2 = \ \dots\ = \mu_a} = \mu$$

und $\sigma_1 = \sigma_2 = \ \dots\ = \sigma_a \ \ (= \sigma)$

(Die Varianzgleichheit wird meist als gültig angenommen bzw. mit den Levene-Test überprüft)

- **Auffinden einer geeigneten Teststatistik**:

Zwei Extremfälle:

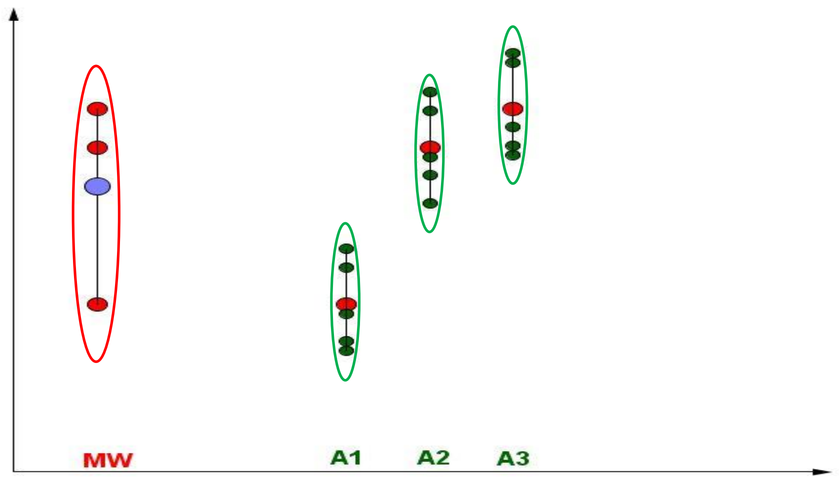


„Streuung“

zwischen den Gruppen **k l e i n e r** als innerhalb der Gruppen

H_0 : a n n e h m e n

(Mittelwerte streuen weniger als Einzelwerte, wenn H0 gilt!)



„Streuung“

zwischen den Gruppen **g r ö ß e r** als innerhalb der Gruppen

H_0 : a b l e h n e n

- **Vergleich der Varianzen** : unter der Annahme von H_0 gilt:

innerhalb der Gruppen	**zwischen** den Gruppen	
Varianz der x_{ij}: $\bar{s}^2 = \frac{s_1{}^2 + s_2{}^2 + \cdots + s_a{}^2}{a}$ (gepoolte Varianz = **Mittelwert der Gruppenvarianzen**)	**Varianz der $\bar{x}_i$:** $s_{\bar{x}_i}{}^2$ (= **Varianz der Gruppenmittelwerte**)	$n \cdot s_{\bar{x}_i}{}^2$
⇩	Ist (erwartungstreuer) **Schätzwert** für ⇩	⇩
σ^2 (**Varianz der x-Werte** in der <u>Grundgesamtheit</u>)	$\frac{\sigma^2}{n}$ (**Varianz der $\bar{x}$ -Werte** in der <u>Grundgesamtheit</u>)	σ^2

Wir **vergleichen** also **zwei Stichprobenvarianzen**, die (unter H_0) in der **Grundgesamtheit gleich** sind:

n * Varianz der Gruppenmittelwerte: „**<u>zwischen</u>** den Gruppen“ $s_1{}^2 = n \cdot s_{\bar{x}_i}{}^2 \rightarrow \sigma^2$

mittlere Varianz der Gruppenvarianzen: „**<u>innerhalb</u>** der Gruppen“ $s_2{}^2 = \bar{s}^2 \rightarrow \sigma^2$

mit Hilfe eines **F-Tests**

- **F - Test :** (dieser prüft somit indirekt die ursprüngl. Hypothese, dass alle Mittelwerte gleich sind!)

$$\boxed{F = \frac{s_1{}^2}{s_2{}^2} = \frac{n \cdot s_{\bar{x}_i}{}^2}{\bar{s}^2}}$$

mit FG(Zähler)= a-1 und FG(Nenner)=N-a

Vorgangsweise: Test **<u>einseitig</u>** durchführen! (α-Anteil der zu großen F-Werte führen zur Ablehnung, kleine Werte, auch F=0, sprechen für die Nullhypothese!)

Signifikanzniveau α festlegen, $\boldsymbol{P = 1 - \alpha}$ -> F_{krit} ermitteln,
F-Wert aus Versuch berechnen, H_0 annehmen/ablehnen

- **Durchschnittsquadrate**

eine andere Vorgangsweise betrachtet Zähler und Nenner der verschiedenen Varianzen:
Jede **Varianzformel** ist so aufgebaut: **DQ=SQ/FG** mit

SQ…Summe der **Abweichungsquadrate** (v jeweiligen Mittelwert)
FG…Freiheitsgrad
DQ…**durchschnittliches Abweichungsquadrat**

- **Zerlegung der Abweichungsquadrate:**
  Sei SQ(T)= Summe der Abweichungsquadrate vom **Gesamtmittelwert** (T=total), wenn alle N=a*n Daten zusammengenommen werden, dann gilt die

  SQ(T) = SQ(A) + SQ(R)
  SQ(T)= Summe Abweichungsquadrate „zwischen“ + Summe Abweichungsquadrate „Rest=innen“

- **Zerlegung der Freiheitsgrade:**

  FG(T) = FG(A) +FG(R)
  N-1 = (a-1) + (N-a)

  Achtung: Es gilt **nicht** die Zerlegung der Durchschnittsquadrate!
  DQ(T)≠DQ(A)+DQ(R) !! also: SQ(T)/(N-1)≠SQ(A)/(a-1)+DQ(R) /(N-a) !!

  Man kann zeigen: $\mathrm{DQ(R)} = \overline{s}^2$ und $\mathrm{DQ(A)} = n \cdot s_{\bar{x}_i}{}^2$, daher:

$$\boxed{F = \frac{DQ(A)}{DQ(R)}}$$

z.B. ANOVA mit Excel: SS=SQ „sum square“ , MS=DQ „mean square“

ANOVA alpha=0,05						
Streuungsursache	*Quadratsummen (SS)*	*Freiheitsgrade (df)*	*Mittlere Quadratsumme (MS)*	*Prüfgröße (F)*	*P-Wert*	*kritischer F-Wert*
Unterschiede zwischen den Gruppen	SQ(R)=2,66666666666	FG(R)=2	DQ(R)=1,33333333333333	0,52173913	0,61814764	5,14325285
Innerhalb der Gruppen	SQ(A)=15,3333333333	FG(A)=6	DQ(A)=2,55555555555556			
Gesamt	SQ(T)=18	FG(T)=8				

Zusammenfassung:

Teststatistik: $\boxed{F = \frac{DQ(A)}{DQ(R)}}$

$$DQ(A) = \frac{SQ(A)}{FG(A)} = \frac{SQ(A)}{a-1} = n * s_{\bar{x}}^2$$

$$DQ(R) = \frac{SQ(R)}{FG(R)} = \frac{SQ(R)}{N-a} = \overline{s}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_a^2}{a}$$

mit $s_{\bar{x}}^2$ =Varianz der Stichprobenmittelwerte

s_i^2 = Varianz der i-ten Stichprobe und $\overline{s}^2$ = mittlere Varianz (gepoolte Varianz)

Test einseitig!: $P = 1 - \alpha$ -> F_{krit} mit FG(A)=a-1 und FG(R)=N-a

$F < F_{krit} \Rightarrow$ H_0 annehmen, sonst ablehnen