Binomialverteilung: fortgeschrittene Aufgabenstellungen

1) Eine besonders seltene Krankheit wird in einer bestimmten Bevölkerungsgruppe untersucht: Sei X die Anzahl der Kranken, die unter einer Gruppe von n Personen festgestellt wurden.
   (a) Erklären Sie im Sachzusammenhang, welcher Umstand durch $1 - 0.998^n - n * \frac{2}{1000} * 0.998^{n-1}$ berechnet wird (Begründung)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Person von dieser Krankheit befallen?
   (c) Erstellen Sie eine Formel für den Erwartungswert der gesunden Personen (nicht an dieser Krankheit erkrankt) in einer Stadt mit a Einwohner
   (d) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Kranken in einer 1000-Einwohner-Stadt in Bereich $\mu \pm 3\sigma$ praktisch beschränkt ist, im dem Sie die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Anzahl außerhalb dieses Wertes liegt.

2) Zur Zubereitung des Kuchens werden etwa 150 Rosinen in den Teig gemischt. Nach dem Backen wird der Kuchen in 8 gleich große Teile aufgeteilt. Eine Person beklagt sich, dass in ihrem Stück maximal 2 Rosinen vorhanden waren. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall.

Lösung

1) (a) Hier wird die W., dass mindestens 2 Personen unter n Personen krank sind, berechnet:

$$P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$
$$= 1 - \binom{n}{0} 0.002^0 * 0.998^n - \binom{n}{1} 0.002^1 * 0.998^{n-1}$$
$$= 1 - 1 * 1 * 0.998^n - n * 0.002^1 * 0.998^{n-1} =$$

$$1 - 0.998^n - n * \frac{2}{1000} * 0.998^{n-1}$$

   (b) p=0.002 , mit einer W. von 0.2%

   (c) Y=Anzahl der gesunden P unter n Personen
   p'=0.998
   Formel für Erwartungswert µ'=a*0.998

   (d) $n = 1000\,, p = 0.002 \rightarrow \ \mu = n * p = 2\,,\ \sigma = 1.4128$

$$\rightarrow 3 * \sigma = 4.238$$

   $\mu - 3 * \sigma = -2.24$ , $\mu + 3 * \sigma = 6.24$
   $P(0 \leq X \leq 6) = 0.99551$ innerhalb -> 0.00449 außerhalb (W.=ca. 4.5 Promille)

2)

Berechnung mit Binomialverteilung

$P(X<=2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{7}{8}\right)^{150} + 150\left(\frac{1}{8}\right)^{1} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{149} + \binom{150}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{148} =$

$\approx 5 \cdot 10^{-7}$

Die Wahrscheinlichkeit ist also extrem klein.

Erklärung und Zuordnung der Begriffe:

Das Mischen kann auch so modelliert werden:

Einzelexperiment: Eine Rosine wird zufällig auf den ausgebreiteten Teig, der in 8 flächengleiche Teile zerlegt ist, fallen gelassen.

Erfolg: tritt ein, wenn Rosine auf ein **festgelegtes Achtel** fällt.

Erfolgswahrscheinlichkeit p=1/8

**Zufallsexperiment** = Einzelexperiment wird n=150 mal wiederholt (für jede Rosine ein Einzelversuch)

X= Anzahl der Erfolge bei n=150 Einzelexperimenten (Wiederholungen)

= **Anzahl der Treffer auf festgelegtes Achtel**

(X=0 , 1 , 2 , …. , 150)

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p(X = x) = \binom{150}{x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{150-x}$$

Fragestellung : $p(X \leq 2) = ?$